Singularities of the Principal Chiral Field on SL(N, R)

Zakharov, V. E.; Mikhailov, A. V.; 川田, 勉

5) D. J. Kaup, A. C. Newell: J. Math. Phys. **19** (1978) 798.
6) T. Kawata, H. Inoue: J. Phys. Soc. Japan **44** (1978) 1968.
7) M. Wadati, K. Konno, Y. H. Ichikawa: J. Phys. Soc. Japan **46** (1979) 1965.
8) M. Wadati, K. Konno, Y. H. Ichikawa: J. Phys. Soc. Japan **47** (1979) 1698.
9) K. Konno, Y. H. Ichikawa, M. Wadati: J. Phys. Soc. Japan **50** (1981) 1025.
10) Y. Ishimori: J. Phys. Soc. Japan **50** (1981) 2471.
11) H. C. Yuen, W. E. Ferguson: Phys. Fluids. **21** (1978) 2116.
12) J. Satsuma: J. Phys. Soc. Japan **40** (1976) 286.
13) F. Kako, N. Yajima: J. Phys. Soc. Japan **49** (1980) 2063.
14) M. Makino, T. Kamimura, T. Taniuti: J. Phys. Soc. Japan **50** (1981) 980.
15) G. L. Lamb, Jr.: J. Math. Phys. **18** (1977) 1964.
16) F. Lund, T. Regge: Phys. Rev. **D, 14** (1976) 1524.

Singularities of the Principal Chiral Field on $SL(N, R)$

* ランダウ理論物理研究所　*V. E. Zakharov,
*A. V. Mikhailov,
** 富山大学工学部　**川田　勉

近年，相対論的に不変な非線形場の研究が盛んである。Zakharov 等は,[1-3] パラメータ λ を含むN次行列微分方程式,

$$\Phi_{\xi}=\frac{U}{1+\lambda}\Phi, \quad \Phi_{\eta}=\frac{V}{1-\lambda}\Phi, \tag{1}$$

により，Principal Chiral 方程式

$$(g_{\eta}g^{-1})_{\xi}+(g_{\xi}g^{-1})_{\eta}=0, \tag{2}$$

が，逆散乱法に沿って解ける事を示した。但し，ξ，η は light-cone 座標，$\xi=(t-x)/2$，$\eta=(t+x)/2$ である。 (2) は，現在迄知られている大半の２次元モデル，南部等のカイラ

ルモデル，Gross-Neveu の $Sp(2N, \boldsymbol{R})$ モデル,[4] Lund-Regge のモデル，その他を含んでいる。ここでは，$g \in SL(N, \boldsymbol{R})$ として，Soliton 解の分類と，この場合の特徴である解の発散の $x-t$ 空間上の軌道 (Singularity) を調べる。

(1) で $U = g_\xi g^{-1}$, $V = g_\eta g^{-1}$ とすれば，g が実及び $\det g = \text{const.}$ より，U, V も実で更に，

$$\mathrm{Tr.}\,U = \mathrm{Tr.}\,V = 0 \tag{3}$$

又，(1) の積分可能条件，

$$U_\eta + V_\xi = 0, \; U_\eta - V_\xi + [U, V] = 0, \tag{4}$$

は (2) に一致し，解 g は (1) の λ- parameter 解 $\Phi(\lambda)$ を知れば，$g = \Phi(0)$ で与えられる。(4) の trivial 解 (実定数とする) U_0, V_0 が Jordan 標準とすれば，次式の解 J_1, J_2は可換となる。

$$J_{1\xi} = \frac{U_0}{1+\lambda} J_1, \quad J_{2\eta} = \frac{V_0}{1-\lambda} J_2. \tag{5}$$

真空解 $J = J_1 J_2$ で Φ を因子化する，

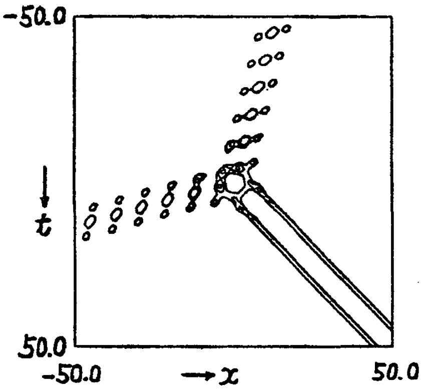

図1　3×3-Breather Soliton の Singularity. 3ケの 2×2-Scliton の共鳴作用にみえる。但し，

$\lambda_1 = -\bar{\lambda}_1 = 0.75 + i$

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0, & 0 & , & 0 \\ 0, & -0.866, & & 0 \\ 0, & 0 & , & 0.866 \end{pmatrix}, \; V_0 = \begin{pmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0.5, & 0 \\ 0, & 0, & 0.5 \end{pmatrix}$$

(積分定数値は省略)

$$\Phi(\lambda)=\Psi(\lambda)\,J(\lambda). \tag{6}$$

λ 独立な行列，$\Phi_1=\Psi(1)\,J_1(1)$，$\Phi_2=\Psi(-1)\,J_2(-1)$ を導くと，(1)，(5) より

$$V\Phi_1=\Phi_1 V_0,\quad U\Phi_2=\Phi_2 U_0, \tag{7}$$

$$2\Phi_{1\xi}=(\Phi_2 U_0\Phi_2^{-1})\Phi_1,\ 2\Phi_{2\eta}=(\Phi_1 V_0\Phi_1^{-1})\Phi_2, \tag{8}$$

を得る。(3)，(7) より $\mathrm{Tr}.\,U_0=\mathrm{Tr}.\,V_0=0$，$U$，$V$ の行列式は保存する事が判る。

詳細は省くが (6) の $\Psi(\lambda)$ は，$\Psi^{-1}(\lambda)$ も同様だが，λ に関する部分分数展開を指定すれば決定できる。対称性 $\Psi(\lambda^*)=\Psi^*(\lambda)$ を考慮して次の形が採用された。

$$\Psi(\lambda)=E+\sum_{j=1}^{M_1}\frac{A_j}{\lambda-\lambda_j}+\sum_{j=1}^{M_1+M_2}\left(\frac{A_j}{\lambda-\lambda_j}+\frac{A_j^*}{\lambda-\lambda_j^*}\right), \tag{9}$$

$\Psi^{-1}(\lambda)$ も同様の形である。[*] ここに A_j は λ 独立である。右辺第二項の (A_j,λ_j) は実数であり，第三項では複素数である。表示 (9) は，M_1 ケの non-breather soliton と M_2 ケの breather soliton を記述すると考えておく。解の構成は，最終的には連立方程式の解法に帰着される。Cramer 公式を使う際に現れる行列式は，$x-t$ 空間内のある曲線で消失し，解が発散する。この発散の軌跡 (Singularity) は，行列 U_0，V_0 の形と，モードが non-breather か breather かに強く影響される。当然の事ながら，non-breather は自由度が低く簡単であり，Singularity の発生は，パラメータ[**] に依る。

以下では，Singularity が常に現れる breather モードに話を限定し，基本的な 2×2-Soliton $(N=2)$ とその応用に少し触れる。

$N=2$ では $U_0=V_0$ として良く，$\det U_0$ の符号で分類される。次の２種を考えるものとする。

$$U_0=\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & -1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0, & 1\\ 0, & 0\end{pmatrix} \tag{10}$$

(i)　$\det U_0<0$ ：Pohlmeyer [5] に習って (4) を２ケの実スカラー場の方程式に直せる。結果は，$SU(2)\times SU(2)$ 不変の式[5] を $\sinh(\cdot)$ 形に変えたものとなっている。 Singularity は，$t-x$ 面の帯状域内に概周期的に分布する閉曲線となる。

(ii)　$\det U_0=0$ ：(8) に対称性 $\Phi_{1,2}^{\mathrm{T}}=S\,\Phi_{1,2}^{-1}\,S^{-1}$ $(S=\delta_3\delta_1)$ を課すと，Gross-Neveu の $Sp(2,\boldsymbol{R})$ モデル[4] を得る。Singularity は ξ，η 軸に漸近する双曲線となる。

$N>2$ の時でも遠方における Singularity の様子が解析できる。図1は，$N=3$，$\det U_0<0$ のケースの数値例である。(9)で soliton 数を，M_1，M_2 とするのは早計かも知れない。$\det U_0<0$ で $M_2=2$ のケースを計算して3ケの 2×2-Soliton を遠方で得た。

終りに(2)のエネルギー及び運動量密度，

$$\mathscr{H}=\frac{1}{4}\mathrm{Tr.}\ (U^2+V^2),\quad \mathscr{P}=-\mathrm{Tr.}\ (U^2-V^2), \tag{11}$$

を 2×2 non-breather モードについて求める。$\det U_0<0$ では，$\mathscr{H}=1$，$\mathscr{P}=0$，$\det U_0=0$ では，$\mathscr{H}=\mathscr{P}=0$ を得る。

注釈

*) その pole を $\bar{\lambda}_k$ とする。

**) 求積の際に現れる積分定数を指す。

参考文献

1) V. E. Zakharov and A. B. Shabat: Func. Anal. Appl. **14** (1980) 166.
2) V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov: Soviet Physics JETP **47** (1978) 1017.
3) V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov: Comm. Math. Phys. **74** (1980) 21.
4) A. Neveu and N. Papanicolaou: Comm. Math. Phys. **58** (1978) 31.
5) K. Pohlmeyer: Comm. Math. Phys. **46** (1976) 207.

スピン系，$SU(2)$－ゲージ場，軸対称重力場方程式の関連性，ある種の厳密解と準粒子的励起

京工織大・工芸　武　野　正　三

§1 Introduction

ソリトンの数理物理の面白さの一つは，広い意味でのソリトンを記述する非線型微分方程式が，微分幾何学，一般相対論，場の理論，プラズマ物理，流体力学，格子力学，磁性体の物理学，高分子物理，生体物理等に於て，同じ形で或は類似の形で現われることであろう。ソリト